

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Rješenja drugog kolokvija - 20. lipnja 2025.

Zadatak 1. Odredite sve pravce koji su od ravnine $\pi_1 \dots 2x - 2y + z = 1$ udaljeni za 3, a od ravnine $\pi_2 \dots 4x + 3z = 7$ udaljeni za 5. Jednadžbu barem jednog pravca zapišite u kanonskom obliku, a ostale možete zapisati u bilo kojem obliku.

Rješenje. Koristimo formulu za udaljenost točke i ravnine, podsjetimo se da za $T = (x_0, y_0, z_0)$ i ravninu $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$, imamo

$$d(T, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Iz te formule slijedi da točka $T = (x, y, z)$ zadovoljava $d(T, \pi_1) = 3$ i $d(T, \pi_2) = 5$ ako i samo ako vrijede sljedeće jednadžbe:

$$d(T, \pi_1) = \frac{|2x - 2y + z - 1|}{3} = 3, \quad d(T, \pi_2) = \frac{|4x + 3z - 7|}{5} = 5.$$

to jest

$$2x - 2y + z - 1 = \pm 9, \quad 4x + 3z - 7 = \pm 25.$$

Zaključujemo da je skup svih točaka T takvih da $d(T, \pi_1) = 3$ i $d(T, \pi_2) = 5$ disjunktna unija sljedeća 4 pravca:

$$\begin{aligned} p_1 \dots & \begin{cases} 2x - 2y + z - 10 = 0 \\ 4x + 3z - 32 = 0 \end{cases} \\ p_2 \dots & \begin{cases} 2x - 2y + z - 10 = 0 \\ 4x + 3z + 18 = 0 \end{cases} \\ p_3 \dots & \begin{cases} 2x - 2y + z + 8 = 0 \\ 4x + 3z - 32 = 0 \end{cases} \\ p_4 \dots & \begin{cases} 2x - 2y + z + 8 = 0 \\ 4x + 3z + 18 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Još treba odrediti kanonski oblik za barem jedan pravac, napravimo to za p_1 . Točka $P = (8, 3, 0)$ leži na p_1 jer zadovoljava jednadžbe obe ravnine koje zadaju p_1 . Odredimo sada $\vec{s}_{p_1}$. Općenito, ako je pravac sadržan u ravnini, onda je njegov vektor smjera ortogonalan na normalu te ravnine. Zaključujemo da je $\vec{s}_{p_1} \perp (2, -2, 1), (4, 0, 3) \implies \vec{s}_{p_1} \parallel (2, -2, 1) \times (4, 0, 3) = (-6, -2, 8)$. Pošto je vektor smjera određen do na množenje skalarom, možemo uzeti $\vec{s}_p := (3, 1, -4)$. (Uočimo još da sva četiri pravca p_1, p_2, p_3, p_4 imaju isti vektor smjera). Kanonska jednadžba pravca p_1 je

$$p_1 \dots \frac{x - 8}{3} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{4}.$$

□

Zadatak 2. Odredite sve realne brojeve λ takve da je pravac

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2\lambda}{3} = \frac{z+\lambda}{\lambda}$$

paralelan s ravninom $\pi \dots 5x - 2y + (\lambda - 4)z = 7$. Za svaki takav λ odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac p i paralelna je s π .

Rješenje. Uočimo da je $\vec{n}_\pi = [5, -2, \lambda - 4]$ jedna normala na ravninu π , a $\vec{s}_p = [2, 3, \lambda]$ je vektor smjera za pravac p . Tada imamo da je $p \parallel \pi \iff \vec{s}_p \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Vrijedi $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 10 - 6 + \lambda(\lambda - 4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Iz $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, odnosno $(\lambda - 2)^2 = 0$, zaključujemo

$$\boxed{\lambda = 2}$$

Sada iz jednadžbe pravca uočimo da je $T := (1, 2\lambda, -\lambda) = (1, 4, -2)$ točka na p . Kada je $\lambda = 2$, normala ravnine π je $\vec{n}_\pi = [5, -2, -2]$. Π je tada ravnina kojoj je $\vec{n}_\pi$ normala i koja sadrži točku T , pa joj je jednadžba

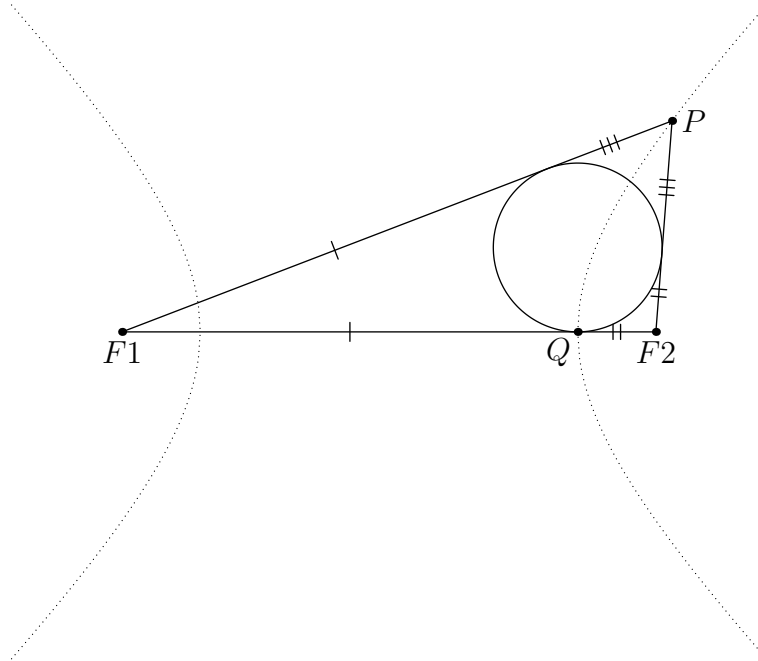
$$\begin{aligned} 5(x-1) - 2(y-4) - 2(z-(-2)) &= 0 \\ \iff 5x - 2y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

□

Zadatak 3. Neka je P proizvoljna točka na hiperboli sa fokusima F_1 i F_2 te neka je Q diralište upisane kružnice trokuta $\triangle PF_1F_2$ sa stranicom $\overline{F_1F_2}$. Dokažite da je Q jedno od tjemena hiperbole.

Rješenje. Neka su Q, R i S dirališta upisane kružnice trokuta $\triangle F_1F_2P$ sa stranicama F_1, F_2, F_2P i PF_1 redom.

Dužine F_1Q i F_1S su kao tangente na kružnicu jednake duljine, isto vrijedi i za tangente iz ostalih vrhova kao što je prikazano na slici ispod.



Uvedimo oznake:

$$x := |F_1Q| = |F_1S|, \quad y := |PS| = |PR|, \quad z := |F_2R| = |F_2Q|.$$

Budući da P leži na hiperboli, vrijedi jednačina

$$||F_1P| - |F_2P|| = 2a.$$

S druge strane duljine stranica F_1P i F_2P možemo izraziti preko uvedenih duljina x, y i z , odakle dobivamo sljedeću jednakost:

$$2a = |(x + y) - (y + z)| = |x - z| = ||F_1Q| - |F_2Q||.$$

Dakle i Q leži na hiperboli, budući da je Q leži na spojnici fokusa, Q mora biti jedno od tjemena hiperbole.

□

Zadatak 4. Neka je F fokus parabole, T tjeme parabole i P proizvoljna točka na paraboli, ako se tangente na parabolu u T i P sijeku u točki Q dokažite da je $\angle PQF = 90^\circ$.

Prvo rješenje.

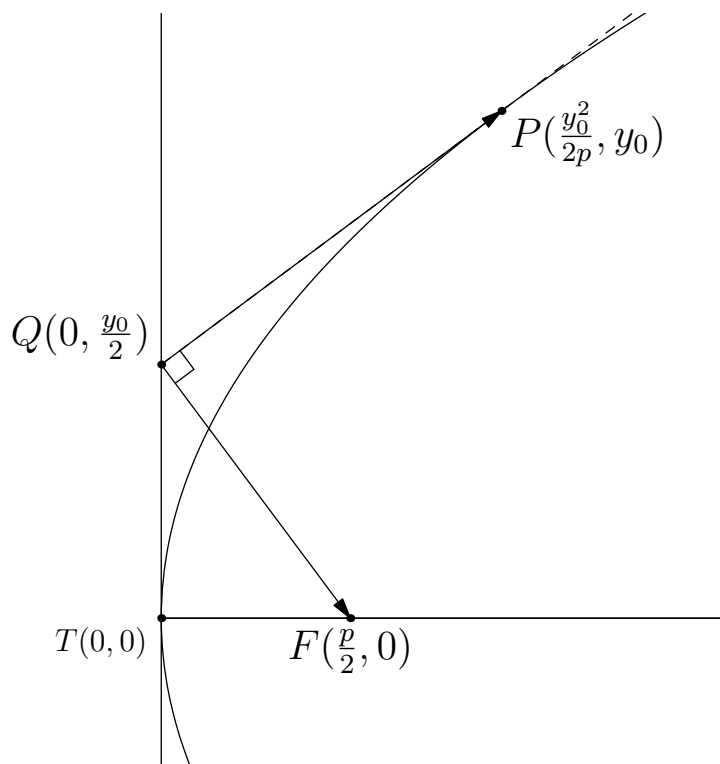
Afinom transformacijom koja je kompozicija translacije i rotacije parabolu možemo svesti u oblik $y^2 = 2px$ za neki $p \in \mathbb{R}$.

Neka je $P = (x_0, y_0)$, kako P leži na paraboli tada koordinate točke P zadovoljavaju jednadžbu

$$y_0^2 = 2px_0 \implies x_0 = \frac{y_0^2}{2p} \implies P = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0 \right).$$

Jednadžba tangente u točki P je dana s

$$yy_0 = p \cdot (x + x_0). \quad (1)$$



Kako je tjeme parabole $y^2 = 2px$ zapravo ishodište $T = (0, 0)$ to je tangenta u tjemenu zapravo y -os, to jest jednadžba tangente u tjemenu je upravo $x = 0$. Dakle točka Q ima koordinatne $(0, y_Q)$. Kako je točka Q presjek tangente u tjemenu i tangente u P ona zadovoljava jednadžbu (1), to jest

$$y_Q y_0 = p \cdot (0 + x_0) \implies y_Q = \frac{px_0}{y_0} = \frac{p \cdot \frac{y_0^2}{2p}}{y_0} = \frac{y_0}{2} \implies Q = \left(0, \frac{y_0}{2} \right).$$

Koordinate fokusa parabole $y^2 = 2px$ su dane s $F = (\frac{p}{2}, 0)$.

Kut $\angle FQP$ će biti pravi kut ako i samo ako je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QF}$ nula.

$$\angle FQP = 90^\circ \iff \overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} = 0.$$

Stoga računamo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QF} &= \left(\frac{p}{2}, -\frac{y_0}{2}\right), \\ \overrightarrow{QP} &= \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0 - \frac{y_0}{2}\right) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, \frac{y_0}{2}\right), \\ \overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} &= \frac{y_0^2}{2p} \cdot \frac{p}{2} - \frac{y_0^2}{4} = 0.\end{aligned}$$

Dakle pravci QF i QP su zaista okomiti, to jest $\angle FQP = 90^\circ$. □

Napomena: Alternativni način za dovršiti zadatak računski je pokazati da vrijedi

$$|PF|^2 = |PQ|^2 + |QF|^2,$$

te koristeći obrat *Pitagorinog teorema* dokazati da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Drugo rješenje.

Neka je N nožište okomice iz P na direktrisu, po geometrijskoj karakterizaciji parabole vrijedi

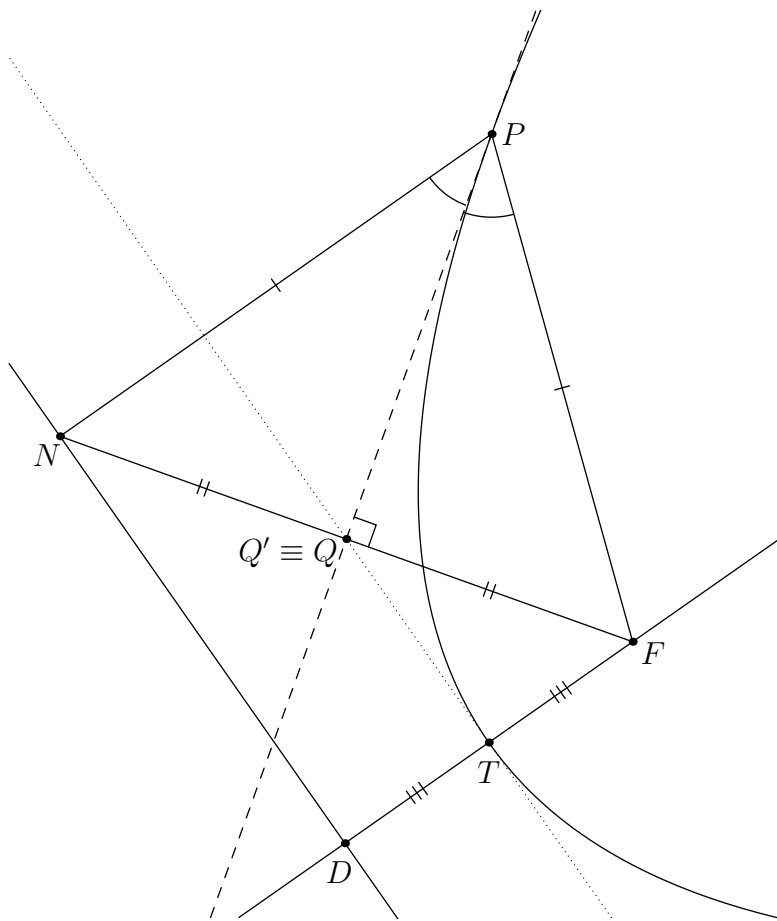
$$|PN| = |PF|. \quad (2)$$

Neka je t tangenta na parabolu u tjemenu T i neka je p tangenta na parabolu u točki P .

Tada je po optičkom svojstvu parabole, p simetrala kuta $\angle FPN$. Kako je po (2) trokut $\triangle FPN$ jednakokrakan to je p i simetrala osnovice $\overline{FN}$.

Točka Q nam je definirana kao presjek tangenti p i t , kada bismo dokazali da Q leži na pravcu FN vrijedilo bi da je Q polovište dužine $\overline{FN}$. Odakle iz činjenice da je p simetrala dužine $\overline{FN}$ slijedi da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Biramo jednostavniju varijantu problema za dokazati. Definiramo točku Q' kao presjek pravca TN i tangente t , te dokazujemo da Q leži na p , to jest da je $Q \equiv Q'$.



Označimo sa D točku na direktrisi koja leži na optičkoj osi (na pravcu FT). Kako je T tjeme na paraboli imamo jednakost $|TF| = |TD|$, a budući da je tjeme T na optičkoj osi ono je i polovište segmenta $\overline{FD}$.

Tangenta t u tjemenu je paralelna sa direktrisom to jest

$$TQ' \parallel DN.$$

Kako je T polovište to je TQ' srednjica trokuta $\triangle FDN$, odakle vidimo da je Q' polovište segmenta $\overline{FN}$. Ovime smo dokazali da je $Q' \equiv Q$ jer se Q' nalazi na tangenti p koju smo karakterizirali kao simetralu stranice $\overline{FN}$. $\square$

Zadatak 5. Dana je krivulja

$$C : x^2 + 2y^2 + xy - x - y = 6.$$

(a) Je li C elipsa, hiperbola ili parabola? Obrazložite.

(b) Odredite neku racionalnu parametrizaciju od C .

Rješenje. (a) Svest ćemo jednadžbu na kanonski oblik koristeći affine transformacije. Prvo ćemo se riješiti mješovitog člana xy upotpunjavanjem do kvadrata.

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 - x - y &= 6 \\ \implies \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 2y^2 - x - y &= 6 \\ \implies \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 - x - y &= 6 \end{aligned}$$

Uvodimo prvu supstituciju $x_1 = x + \frac{y}{2}$, $y_1 = y$. Tada je $x = x_1 - \frac{y_1}{2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1^2 + \frac{7}{4}y_1^2 - \left(x_1 - \frac{y_1}{2}\right) - y_1 &= 6 \\ \implies x_1^2 - x_1 + \frac{7}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 &= 6 \end{aligned}$$

Sada upotpunjujemo na potpune kvadrate po varijablama x_1 i y_1 :

$$\begin{aligned} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\left(y_1^2 - \frac{2}{7}y_1\right) &= 6 \\ \implies \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(y_1 - \frac{1}{7}\right)^2 &= \frac{44}{7}. \end{aligned}$$

Uvođenjem novih koordinata $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$ i $y_2 = y_1 - \frac{1}{7}$, dobivamo kanonski oblik:

$$\boxed{x_2^2 + \frac{7}{4}y_2^2 = \frac{44}{7}}.$$

Kako su koeficijenti uz x_2^2 i y_2^2 oba pozitivna, zaključujemo da je krivulja C **elipsa**.

(b) Da bismo našli racionalnu parametrizaciju, prvo moramo pronaći jednu racionalnu točku na krivulji. Uočimo da se $P = (0, 2)$ nalazi na krivulji (općenito je ideja uvrštavati male brojeve dok ne nađemo točku koja zadovoljava jednadžbu).

Sada povlačimo pravce kroz točku P s racionalnim koeficijentom smjera t . Jednadžba takvog pravca je $y = tx + 2$. Uvrstimo to u jednadžbu krivulje C :

$$x^2 + 2(tx + 2)^2 + x(tx + 2) - x - (tx + 2) = 6.$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(t^2x^2 + 4tx + 4) + tx^2 + 2x - x - tx - 2 - 6 &= 0 \\ \iff (2t^2 + t + 1)x^2 + (7t + 1)x &= 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje kvadratne jednadžbe u x je $x_1 = 0$, što odgovara našoj početnoj točki $P = (0, 2)$. Drugo rješenje je

$$x_2 = -\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}.$$

Pripadna y -koordinata je

$$y_2 = tx_2 + 2 = \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1}.$$

Dakle, tražena racionalna parametrizacija krivulje C je dana s

$$Q(t) = \left(-\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}, \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1} \right). \quad \square$$

$\square$